

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta pedagogická

Studijní program: Učitelství pro střední školy
Katedra: Katedra aplikované matematiky
Kombinace: Matematika – informatika



VARIAČNÍ ÚLOHY V MATEMATICKÉ ANALÝZE

VARIATIONAL PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS

Diplomová práce: 05-FP-KAP-02
Autor: Karel Stanko
Adresa: Příšovice 204, 463 46
E-mail: karel.stanko@centrum.cz
Podpis:
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martina Šimůnková, PhD., KAP TU v Liberci
Konzultant: Doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc., KAP TU v Liberci

Počet	stran	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
	47	12	1	9	3

Zpracování a sazba: L^AT_EX 2_ε

V Liberci dne: 15.5.2005

TU v Liberci, FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 Liberec 1, Hálkova 6

katedra: Katedra aplikované matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(Pro magisterský studijní program)

pro (diplomant): Karel Stanko

adresa: Příšovice 204, 463 46

obor: Učitelství pro střední školy, MA-IF

název DP: Variační úlohy v matematické analýze

název DP v angličtině: Variational problems in mathematical analysis

vedoucí DP: RNDr. Martina Šimůnková, PhD., KAP TU v Liberci

konzultant: Doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc., KAP TU v Liberci

termín odevzdání: květen 2005

.....
děkan

.....
vedoucí katedry

Převzal (diplomant): Karel Stanko

Datum:

Podpis:

Název DP:

Variační úlohy v matematické analýze

Vedoucí práce:

RNDr. Martina Šimůnková, PhD.

Úvod:

Téma bylo vypsáno na katedře aplikované matematiky FP TU v Liberci. Je zajímavé nejen z didaktického hlediska - téma propojuje oblasti moderní matematické analýzy s konkrétními problémy, jejichž formulace je možná již na středoškolské úrovni, ale může být přínosem i akademickým pracovníkům technických fakult, kteří se podobnou problematikou zabývají a mají zájem o hlubší pochopení tématu.

Cíl:

Cílem diplomové práce je seznámit se se základy variačního počtu a aplikovat jej na konkrétní problémy, zejména na problém řetězovky a minimálního povrchu mýdlové bubliny.

Požadavky:

Seznámit se se základy variačního počtu. Rozvíjet schopnost přesné argumentace. Dále zvládnout typografický systém TeX.

Literatura:

- REKTORYS A SPOL.: *Přehled užití matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
- REKTORYS A SPOL.: *Přehled užití matematiky II*. Prometheus, Praha, 1995.
- BRDIČKA M., HLADÍK A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha, 1987.

Prohlášení o původnosti práce

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Liberci dne: 16.5.2005

Karel Stanko

.....

Prohlášení k využívání výsledků DP

Byl jsem se seznámen s tím, že na mou práci se plně vztahuje zákon č.121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé diplomové práce a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé diplomové práce (prodej, zapůjčení, kopírování, apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své diplomové práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše). Diplomová práce je majetkem školy, s diplomovou prací nelze bez svolení školy disponovat.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně Technické univerzity v Liberci, kde bude uložena.

Autor:

Karel Stanko

Podpis:

.....

Adresa:

Příšovice 204, 463 46

Datum:

16.5.2005

O registrovaných známkách

Všechny registrované nebo jiné obchodní známky použité v této práci jsou majetkem jejich vlastníků. Uvedením nejsou zpochybněna z toho vyplývající vlastnická práva.

Poděkování

Děkuji své vedoucí diplomové práce RNDr. Martině Šimůnkové, PhD. za svěření zajímavého tématu, vydatnou pomoc během konzultací a trpělivost.

Anotace

Variační úlohy v matematické analýze

Cílem této diplomové práce je zjistit, jaký tvar zaujme mýdlová blána napnutá mezi dvěma shodnými drátěnými rámečky ve tvaru kružnice. Je zde odvozeno, že povrch blány odpovídá rotační ploše, která je vytvořena rotací řetězovky. Tato plocha je jediná rotační plocha s minimálním povrchem, která se nazývá catenoid. Vedle výpočtů je v diplomové práci zahrnut i praktický experiment.

Annotation

Variational problems in mathematical analysis

The aim of this diploma thesis is to analyse the shape of the soap bubble that stretches between two identical wire rings. It is derived here that the surface of this bubble is the surface of revolution, which is obtained by rotating the catenary curve - catenoid. Besides calculations, practical experiment is also included in this thesis.

Obsah

1	Úvod	9
2	Mýdlová blána	10
2.1	Definování problému	10
2.2	Řešení problému	11
2.2.1	Povrch rotační plochy	11
2.2.2	Extrémy funkcí typu $\int_a^b f(x, y, y') \, dx$	13
2.2.3	Minimalizace povrchu	14
2.2.4	Derivace funkce $f(t)$	17
2.2.5	Derivace zbytku Taylorova polynomu	18
2.2.6	Stacionární bod	20
2.2.7	Minimum na jednodimenziální množině	27
2.2.8	Minimum	34
2.3	Experiment	37
2.4	Shrnutí	39
3	Závěr	41
A	Cauchy-Schwarzova nerovnost	42
B	Konference	44

Značky a značení

- Pro běžný text je použito normální proporcionální patkové písmo.
- Pro zvýraznění pojmu je použita *kurzíva*.

Číslice	Název
\equiv	je identicky rovno
\doteq	je přibližně rovno
\leq	je menší nebo rovno
\geq	je větší nebo rovno
\cdot	krát (násobení)
$/$	děleno (dělení v textu)
$ a $	absolutní hodnota čísla a
a^n	n -tá mocnina
\sum	suma (součet)
\in	je prvkem
$\forall x \in M$	pro všechna x z M
\exists	existenční kvantifikátor
\Rightarrow	implikace
(a, b)	otevřený interval
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$\max_{x \in (a, b)}$	největší x z intervalu
$f(x), g(x)$	funkce jedné proměnné x
$f(x, y)$	funkce dvou proměnných x, y
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$	funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A
$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$	první derivace funkce $y = f(x)$
$y'', f''(x), y^{(2)}, f^{(2)}(x)$	druhá derivace funkce $y = f(x)$
$dy, df(x)$	diferenciál funkce $y = f(x)$
$\frac{\delta f}{\delta x}$	parciální derivace funkce f (více proměnných) podle x
df	totální diferenciál funkce f
\int	neurčitý integrál
\int_a^b	určitý integrál od a do b
$[f(x)]_a^b$	$f(b) - f(a)$
$\sinh x$	hyperbolický sinus x
$\cosh x$	hyperbolický kosinus x
$\tanh x$	hyperbolický tangens x
$\operatorname{argcosh}$	argument hyperbolického kosinu x

Kapitola 1

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá aplikací variačních metod matematické analýzy na konkrétní problém z reálného světa.

Problematikou minimálního povrchu se matematikové zabývali již dávno. Náš konkrétní problém povrchu mýdlové bubliny, která vznikne mezi dvěma drátky tvaru kružnice, zkoumal např. Leonhard Euler, který v roce 1744 odvodil rovnici popisující tuto rotační plochu, která je jedinou rotační plochou s minimálním povrchem [4].

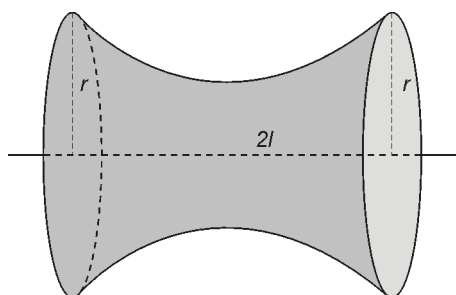
V publikacích [2] a [3] jsou v kapitolách věnovaných variačnímu počtu popsány různé kategorie variačních úloh. Tyto úlohy vedou většinou k hledání extrémů různých funkcionalů a v těchto publikacích se autoři věnují obecným postupům jejich hledání. V publikaci [3] je rovněž uvedeno i několik příkladů, ale při výpočtech je použito mnoho nedokázaných tvrzení a cílem této diplomové práce je vyřešit problém čistými matematickými prostředky a to co možná nejjednoduššími, aby alespoň některé části byly srozumitelné zvědavým studentům na střední škole.

Kapitola 2

Mýdlová blána

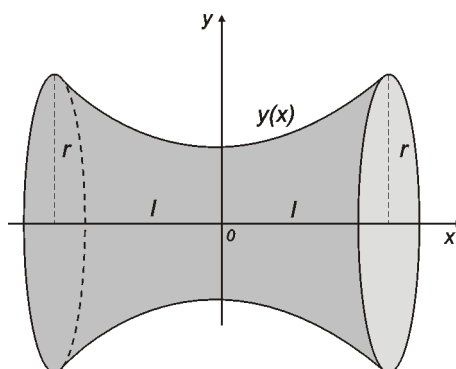
2.1 Definování problému

Máme následující problém. Jaký tvar zaujme mýdlová blána, napnutá mezi dvěma identickými rámečky tvaru souosých kružnic o poloměru r , které leží v rovnoběžných rovinách a jejichž středy leží na přímce k těmto rovinám kolmé? Viz (obrázek 2.1). Umístíme-li blánu do soustavy kartézských sou-



Obrázek 2.1: Mýdlová blána

řadnic tak, aby úsečka spojující středy kružnic ležela na ose x a její střed ležel v počátku soustavy souřadnic, můžeme povrch mýdlové blány popsat jako rotační plochu vzniklou rotací jisté křivky $y = y(x)$ kolem osy x (obrázek 2.2). Povrch mýdlové blány se chová stejně jako volný povrch kapaliny, která má tendenci nabývat takového tvaru, aby obsah jejích povrchů byl co nejmenší a tím byla minimální povrchová energie [6]. Naším úkolem je tedy nalézt takovou křivku $y = y(x)$, aby plocha vzniklá její rotací kolem osy x měla minimální povrch.



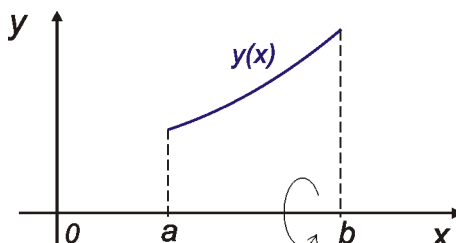
Obrázek 2.2: Rotační plocha

2.2 Řešení problému

2.2.1 Povrch rotační plochy

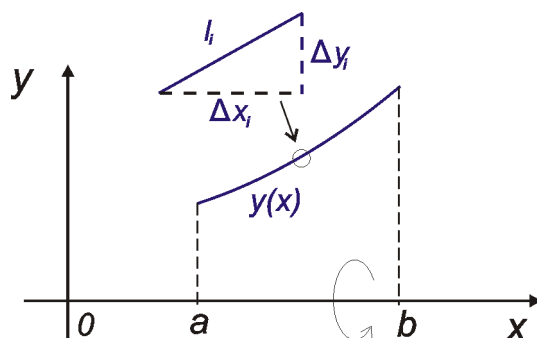
Nejdříve budeme potřebovat vzorec pro výpočet povrchu rotační plochy.

Nechť funkce $y(x)$ je spojitá. Hledáme vzorec pro výpočet povrchu rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = y(x)$ kolem osy x pro x z intervalu $\langle a, b \rangle$ (obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Rotační plocha

Rozdělme interval body $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ na n podintervalů velikosti $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Pro dostatečně malé Δx můžeme odpovídající část křivky považovat za úsečku. Její délku pak můžeme spočítat pomocí Pythagorovy věty (obrázek 2.4). Velikost jedné odvěsny je zřejmě Δx_i a velikost druhé (Δy_i můžeme vypočítat tak, že vynásobíme Δx_i směrnici přímky, na níž leží přepona, což je derivace v bodě \bar{x}_i , kde \bar{x}_i je nějaký bod z intervalu



Obrázek 2.4: Odvození vzorce

$\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Tedy $\Delta y_i = y'(\bar{x}_i) \Delta x_i$ a hledaná délka je přibližně

$$l_i \doteq \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + [y'(\bar{x}_i) \Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [y'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i.$$

Když bude tato část grafu rotovat kolem osy x , dostaneme plášť komolého kužele. Jeho obsah vypočítáme tak, že vynásobíme délku této úsečky vzdáleností, kterou opíše její střed. Tato vzdálenost se pro interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ rovná obvodu kružnice o poloměru

$$\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2}$$

Pro dostatečně malé Δx můžeme vzít nějaký bod \bar{x}_i z toho intervalu a položit

$$\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \doteq y(\bar{x}_i).$$

Nyní již můžeme vyjádřit přibližný obsah rotační plochy v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

$$S_i \doteq 2\pi y(\bar{x}_i) \sqrt{1 + [y'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$$

a pro celý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

$$S \doteq \sum_{i=1}^n 2\pi y(\bar{x}_i) \sqrt{1 + [y'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i.$$

Přesnou hodnotu dostaneme pro n jdoucí k nekonečnu.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi y(\bar{x}_i) \sqrt{1 + [y'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$$

Z definice určitého integrálu je zřejmé, že

$$S = \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (2.1)$$

2.2.2 Extrémy funkcionalů typu $\int_a^b f(x, y, y') dx$

Jak již bylo uvedeno, po nalezení vzorce pro výpočet rotační plochy se naše úloha redukuje na nalezení křivky v rovině. Hledaná křivka je určena funkcí $y(x)$, pro níž je obsah určený vztahem (2.1) minimální. Tento vztah můžeme obecně napsat jako funkci F

$$F[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Jak uvádí Rektorys [2], funkce F se nazývá reálný *funkcional* a my si nejprve z této publikace uvedeme několik definic, které budeme potřebovat.

Definice 1. *Křivku K v euklidovské rovině E_2 s popisem*

$$y = y(x), x \in \langle a, b \rangle \quad (2.2)$$

nazveme křivkou r -té třídy v intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže funkce $y(x)$ má v nějakém otevřeném intervalu (\bar{a}, \bar{b}) , obsahujícím uzavřený interval $\langle a, b \rangle$, spojitou derivaci $y^{(r)}$ (a tedy také spojitě derivace všech nižších řádů včetně nultého).

Definice 2. *Vzdáleností nultého řádu dvou křivek K_1, K_2 , s popisem*

$$K_1 : y = y_1(x), x \in \langle a, b \rangle$$

$$K_2 : y = y_2(x), x \in \langle a, b \rangle$$

nazýváme číslo

$$d(K_1, K_2) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |y_2(x) - y_1(x)|,$$

tj. maximum absolutní hodnoty rozdílu jejich y -ových souřadnic v $\langle a, b \rangle$.

Definice 3. *Jsou-li křivky K_1 a K_2 v definici (2) r -té třídy, nazýváme jejich vzdáleností r -tého řádu největší z čísel*

$$\max_{x \in \langle a, b \rangle} |y_2(x) - y_1(x)|, \max_{x \in \langle a, b \rangle} |y_2'(x) - y_1'(x)|, \dots, \max_{x \in \langle a, b \rangle} |y_2^{(r)}(x) - y_1^{(r)}(x)|,$$

tj. číslo

$$d_r(K_1, K_2) = \max_{k \in \{0, \dots, r\}} \left[\max_{x \in \langle a, b \rangle} |y_2^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| \right],$$

kde $y_i^{(0)}(x) = y_i(x)$ pro $i = 1, 2$. Zřejmě je $d_0(K_1, K_2) = d(K_1, K_2)$.

Poznámka 1. *Množinu všech křivek \tilde{K} s popisem*

$$\tilde{K}_1 : y = \tilde{y}(x), x \in \langle a, b \rangle,$$

jejichž vzdálenost r -tého řádu od křivky K je menší než ε ($\varepsilon > 0$), nazveme ε -ovým okolím r -tého řádu křivky K , která je třídy alespoň T_r . Zřejmě leží každá křivka, která patří k ε -ovému okolí r -tého řádu křivky K , v jejím ε -ovém okolí nultého řádu.

V našem případě je

$$F[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (2.3)$$

určitý funkcionál, který pro každou křivku K s popisem (2.2) představuje určité číslo. Jeho definiční obor je množina L všech křivek třídy T_1 v $\langle a, b \rangle$ s popisem (2.2) a s vlastností $[x, y(x), y'(x)] \in \Omega$ pro $x \in \langle a, b \rangle$, kde Ω je nějaká otevřená podmnožina E_3 .

Definice 4. *Říkáme, že funkcionál $F(K)$ nabývá pro křivku K s popisem*

$$K_0 : y = y_0(x), x \in \langle a, b \rangle \quad (2.4)$$

patřící k jeho definičnímu oboru L , svého absolutního minima na L , jestliže platí

$$F(K) \geq F(K_0) \quad (2.5)$$

pro všechny křivky K z množiny L .

Definice 5. *Jestliže existuje takové ε -ové okolí (nultého řádu) křivky K_0 z (2.4), že platí (2.5) pro všechny křivky $K \in L$ ležící v tomto okolí, říkáme, že funkcionál (2.3) nabývá pro křivku K_0 silného relativního minima na L .*

Definice 6. *Existuje-li takové ε -ové okolí prvního řádu křivky K_0 , že platí (2.5) pro všechny křivky $K \in L$ z tohoto okolí, říkáme, že funkcionál (2.3) nabývá pro křivku K_0 slabého relativního minima na L .*

2.2.3 Minimalizace povrchu

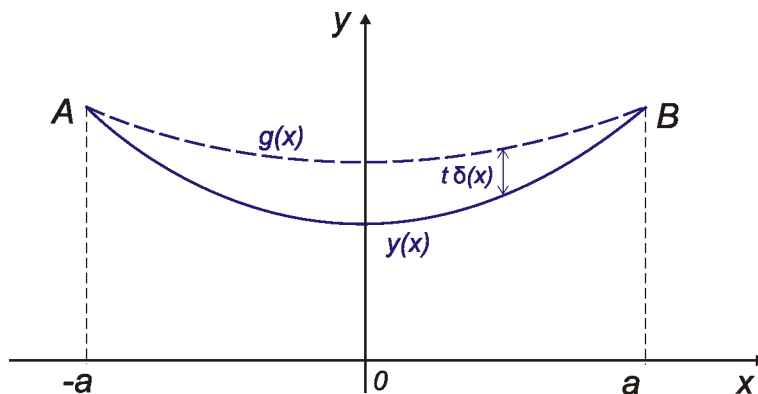
My se budeme nadále věnovat našemu konkrétnímu problému. Při hledání minima se omezíme na slabé relativní minimum, protože budeme v našich výpočtech potřebovat, aby byla první derivace hledané funkce omezená. Ještě předtím vyřešíme jednodušší problém na jednoparametrickém prostoru funkce.

Nejdříve musíme popsat definiční obor funkce F .

$$F = \int_{-a}^a 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.6)$$

Tím nechť je taková množina funkcí $y(x)$, které zobrazují interval $\langle -a, a \rangle$ do množiny reálných čísel a které mají spojitou první a druhou derivaci. Spojitou druhou derivaci požadujeme, protože budeme tuto vlastnost potřebovat pro naše pozdější výpočty. Dále požadujeme, aby funkce $y(x)$ byla na intervalu $\langle -a, a \rangle$ kladná.

Hledaná křivka vychází z bodu $A[-a, y(-a)]$ a končí v bodě $B[a, y(a)]$, přičemž $y(a) = y(-a)$. Nechť $y(x)$ je funkce, pro kterou je funkcionál F (2.6) minimální. Pro libovolnou funkci $g(x)$, která splňuje dané okrajové podmínky



Obrázek 2.5: Množina funkcí

tedy platí

$$F[y(x)] \leq F[g(x)].$$

Označme přírůstek funkce $y(x)$

$$\delta y(x) = g(x) - y(x). \quad (2.7)$$

Z toho plyne, že

$$g(x) = y(x) + \delta y(x).$$

a z daných okrajových podmínek plyne rovněž

$$\delta y(-a) = \delta y(a) = 0.$$

Pro libovolnou pevně zvolenou funkci $g_0(x)$, která je z blízkého okolí funkce $y(x)$, můžeme jinou funkci $g(x)$, splňující dané podmínky získat jako

$$g(x) = y(x) + t\delta y(x). \quad (2.8)$$

Hledanou funkci $y(x)$ minimalizující funkcionál F dostaneme z (2.8) pro parametr t jdoucí k 0. (obrázek 2.5)

Jsou-li funkce $y(x)$, $g(x)$ a tím i $\delta y(x)$ pevně zvolené funkce, dosazením vztahu (2.8) do funkcionálu (2.6) definujeme funkci jedné proměnné t

$$\phi(t) = 2\pi \int_{-a}^a (y + t \delta y) \sqrt{1 + (y' + t \delta y')^2} dx, \quad (2.9)$$

kde $y = y(x)$, $\delta y = g(x) - y(x)$ a $\delta y' = g'(x) - y'(x)$. Nyní musíme ověřit, zda má tato funkce v bodě $t = 0$ lokální minimum.

Pokud má funkce $\phi(t)$ v bodě $t = 0$ lokální minimum, musí být její první derivace v bodě $t = 0$ $\phi'(0) = 0$. To je nutná podmínka pro existenci extrému.

Nyní tedy potřebujeme najít derivace funkce $\phi(t)$. Definujme funkci $f(t)$ jako

$$f(t) = (y + t \delta y) \sqrt{1 + (y' + t \delta y')^2} dx. \quad (2.10)$$

Tuto funkci nyní rozvineme podle Taylorovy věty v okolí bodu $t = 0$.

Věta 1 (Taylorova věta). [1] *Nechť $f(x)$ má v $\langle a, a + h \rangle$ spojitě derivace do n -tého řádu včetně a v $(a, a + h)$ spojitou derivaci $(n + 1)$ -ho řádu. Pak*

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + R_{n+1},$$

kde výraz R_{n+1} je zbytek, který je v Lagrangeově tvaru

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta h)}{(n + 1)!} h^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Píšeme-li přírůstek h ve tvaru $h = x - a$, pak pro $a = 0$ dostaneme tvar

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1},$$

Aplikací Taylorovy věty na funkci $f(t)$ dostáváme pro $t = 0$

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \frac{f^{(3)}(\vartheta t)}{(3)!} t^3 \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Dosadíme-li zpět do vztahu dostáváme pro funkci

$$\phi(t) = 2\pi \int_{-a}^a f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \frac{f^{(3)}(\vartheta t)}{(3)!} t^3 dx$$

a po úpravě (protože budeme hledat minimum, konstantu 2π můžeme vynechat a přestože po vynechání této konstanty dostáváme jinou funkci, budeme ji pro zjednodušení značit stejně)

$$\phi(t) = \int_{-a}^a f(0) + t \int_{-a}^a f'(0) + \frac{t^2}{2} \int_{-a}^a f''(0) + \frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx$$

Nyní nalezneme jednotlivé derivace funkce $f(t)$.

2.2.4 Derivace funkce $f(t)$

$$f(t) = (y + t \delta y) \sqrt{1 + (y' + t \delta y')^2}$$

Provedeme derivaci součinu a dostáváme

$$f'(t) = \delta y \sqrt{1 + (y' + t \delta y')^2} + \frac{(y + t \delta y)(y' + t \delta y') \delta y'}{\sqrt{1 + (y' + t \delta y')^2}}.$$

Pro $t = 0$ je

$$f'(0) = \delta y \sqrt{1 + y'^2} + \frac{y y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (2.11)$$

Opět pomocí derivací součinu vypočítáme druhou derivaci $f(t)$, která je po úpravě rovna

$$f''(t) = \frac{2(y' \delta y' + t \delta y'^2) \delta y + (y + t \delta y) \delta y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + 2 t y' \delta y' + t^2 (\delta y')^2}} - \frac{(y + t \delta y)(y' \delta y' + t \delta y'^2)^2}{(1 + y'^2 + 2 t y' \delta y' + t^2 (\delta y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Druhá derivace v bodě $t = 0$

$$f''(0) = \frac{2y' \delta y' \delta y + y(\delta y')^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y y'^2 (\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.12)$$

Třetí derivace $f(t)$ se po úpravě rovná

$$f^{(3)}(t) = \frac{3(\delta y')^2 (-t y' \delta y \delta y' - \delta y + y y' \delta y' + t y (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2 y' t \delta y' + t^2 (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2.13)$$

Chceme derivovat funkci

$$\phi(t) = \int_{-a}^a f(0) + t \int_{-a}^a f'(0) + \frac{t^2}{2} \int_{-a}^a f''(0) + \frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx.$$

Protože $f(0)$, $f'(0)$ ani $f''(0)$ nezávisí na t , je její první derivace

$$\phi'(t) = \int_{-a}^a f'(0) + t \int_{-a}^a f''(0) + \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) \right) dx$$

Problém je tedy jen s posledním členem.

2.2.5 Derivace zbytku Taylorova polynomu

Definujme funkci $g(t)$ takto:

$$g(t) = \int_{-a}^a t^3 f^{(3)}(\vartheta t) \, dx$$

Podle definice derivace je

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-a}^a h^3 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx - 0}{h}$$

a tedy

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx.$$

Tuto limitu vypočítáme podle věty o sevření.

Věta 2 (Věta o sevření). *Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ a $\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.*

Důkaz věty 2. Z definice limity plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

a odtud

$$f(x) > a - \varepsilon.$$

Obdobně

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \Rightarrow \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) : |g(x) - a| < \varepsilon$$

a z toho plyne

$$g(x) < a + \varepsilon.$$

Je tedy

$$a - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon$$

a limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a.$$

□

Z definice derivace je

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

Abychom mohli použít větu o sevření, musíme omezit funkci, jejíž limitu hledáme. K tomu nám poslouží její absolutní hodnota.

$$-\left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| \leq \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \leq \left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| \quad (2.14)$$

Víme, že platí vztah

$$\left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| \leq \int_{-a}^a |h^2 f^{(3)}(\vartheta h)| \, dx. \quad (2.15)$$

Nejdříve zkusíme omezit $f^{(3)}(t)$ nějakou konstantou. Funkci y máme a vezmeme-li konkrétní δy , pak protože jsou to spojité funkce, jsou omezené a můžeme je tedy omezit konstantami. Omezíme-li ve vztahu pro třetí derivaci

$$f^{(3)}(t) = \frac{3(\delta y')^2 (-ty' \delta y \delta y' - \delta y + yy' \delta y' + ty (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2y't \delta y' + t^2 (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$|y'| \leq K_2$, $|\delta y| \leq K_3$, $|\delta y'| \leq K_1$, zvolíme $|t| \leq K_1$ a největší z těchto konstant označíme K , můžeme položit

$$|f^{(3)}(t)| = \left| \frac{3(\delta y')^2 (-ty' \delta y \delta y' - \delta y + yy' \delta y' + ty (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2y't \delta y' + t^2 (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}} \right|$$

a odtud plyne

$$|f^{(3)}(t)| \leq 3K^2 (K^4 + K + K^3 + K^4 + K^3) = 6K^6 + 6K^5 + 3K^3$$

$f^{(3)}(\vartheta t)$ tedy můžeme omezit konstantou $K_2 = 6K^6 + 6K^5 + 3K^3$. Tato konstanta závisí na δy a se změnou δy se tedy mění i tato konstanta.

Vrátíme-li se k nerovnosti (2.15)

$$\left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| \leq \int_{-a}^a |h^2 f^{(3)}(\vartheta h)| \, dx, \quad (2.16)$$

platí pro její druhý člen, že

$$\int_{-a}^a |h^2 f^{(3)}(\vartheta h)| \, dx \leq \int_{-a}^a |h^2 K_2| \, dx$$

Protože

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a}^a |h^2 K_2| \, dx = 0,$$

plyne odtud

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| = 0.$$

Zřejmě

$$\lim_{h \rightarrow 0} - \left| \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx \right| = 0,$$

a proto z (2.14) vyplývá

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-a}^a h^2 f^{(3)}(\vartheta h) \, dx = 0$$

A derivace $g'(0)$ je tedy

$$g'(0) = 0$$

2.2.6 Stacionární bod

Nyní již můžeme vypočítat derivaci funkce $\phi(t)$, která bude v bodě $t = 0$

$$\phi'(0) = \int_{-a}^a f'(0) \, dx$$

a po dosazení (2.11) za $f'(0)$

$$\phi'(0) = \int_{-a}^a \delta y \sqrt{1 + y'^2} + \frac{y y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, dx$$

Má-li být první derivace rovna nule pak dostáváme rovnici

$$\int_{-a}^a \delta y \sqrt{1 + y'^2} + \frac{y y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, dx = 0$$

Integrál rozdělíme na součet dvou integrálů

$$\int_{-a}^a \delta y \sqrt{1 + y'^2} \, dx + \int_{-a}^a \frac{y y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, dx = 0 \quad (2.17)$$

a druhý člen upravíme metodou per partes

$$\int_{-a}^a \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, \delta y' \, dx = \left[\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \, \delta y \right]_{-a}^a - \int_{-a}^a \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \delta y \, dx$$

protože z okrajových podmínek je $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, je

$$\int_{-a}^a \frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}} \delta y' dx = - \int_{-a}^a \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \delta y dx$$

A po dosazení do rovnice (2.17) dostaneme:

$$\int_{-a}^a \left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \right] \delta y dx = 0$$

Nyní budeme potřebovat následující větu, která je nazývána základní větou variačního počtu [3].

Věta 3. *Nechť $\phi(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Je-li pro libovolnou spojitou funkci η , která splňuje podmínku $\eta(a) = \eta(b) = 0$*

$$\int_a^b \phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

pak funkce $\phi(x)$ je v celém intervalu identicky rovna nule, tedy

$$\phi(x) \equiv 0 \quad \text{pro } x \in \langle a, b \rangle.$$

Důkaz věty 3. Důkaz provedeme sporem podobně jako v [3]. Předpokládejme, že pro nějaké x z intervalu $\langle a, b \rangle$ je $\phi(x) \neq 0$. Protože $\eta(x)$ je libovolná spojitá funkce, která splňuje podmínku $\eta(a) = \eta(b) = 0$, můžeme tuto funkci definovat např. jako $\eta(x) = -\phi(x)(x-a)(x-b)$. Protože je $\phi(x)$ spojitá, je spojitá i $\eta(x)$. Pro součin $\phi(x)\eta(x)$ nyní dostáváme

$$\phi(x)\eta(x) = -[\phi(x)]^2(x-a)(x-b) \quad (2.18)$$

a je zřejmé, že tento součin je v intervalu $\langle a, b \rangle$ větší nebo roven nule. Ale určitý integrál z nezáporné spojitě funkce může být roven nule jen v případě, že tato funkce je rovna nule. Tedy

$$-[\phi(x)]^2(x-a)(x-b) = 0$$

Protože je ale $-(x-a)(x-b) > 0$ na (a, b) , znamená to, že $\phi(x) = 0$ v celém intervalu $\langle a, b \rangle$, což je ve sporu s předpokladem a tím je věta 3 dokázána. \square

Z věty 3 vyplývá, že rovnost (2.17) je splněna, pokud

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0.$$

Tím jsme obdrželi diferenciální rovnici druhého řádu, kterou se pokusíme zjednodušit na rovnici prvního řádu. Nejprve ji vynásobíme y' a dostaneme:

$$y' \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) y' = 0 \quad (2.19)$$

Podle derivace součinu a složené funkce zkusíme oba členy rovnice upravit. První člen levé strany rovnice (2.19) vyjádříme z tohoto vztahu

$$\frac{d}{dx} (y \sqrt{1 + y'^2}) = \sqrt{1 + y'^2} \cdot y' + \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y''.$$

Tedy

$$\sqrt{1 + y'^2} \cdot y' = \frac{d}{dx} (y \sqrt{1 + y'^2}) - \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y'' \quad (2.20)$$

Podobně budeme postupovat pro druhý člen levé strany rovnice. Podle věty o derivaci součinu platí

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right) = y'' \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)$$

a tedy

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right) - y'' \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (2.21)$$

Dosadíme-li vztahy (2.20) a (2.21) do rovnice (2.19) dostáváme

$$\frac{d}{dx} (y \sqrt{1 + y'^2}) - \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y'' + y'' \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right) = 0$$

a po úpravě

$$\frac{d}{dx} \left(y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right) = 0.$$

Po integraci obou stran rovnic

$$\int \frac{d}{dx} \left(y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' \right) dx = \int 0 dx$$

dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' = C_1.$$

Po úpravě můžeme tuto rovnici napsat ve tvaru

$$y = C_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí metody separace proměnných:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ dx &= \frac{C_1}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} dy \\ \int dx &= \int \frac{C_1}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} dy \\ x &= C_1 \operatorname{argcosh} \frac{y}{C_1} + C_2 \end{aligned}$$

a řešení rovnice je

$$y(x) = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1} \quad (2.22)$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek. Rovnice (2.22) je obecné řešení pro případ, že kroužky, mezi kterými je blána napnuta, mají různé poloměry. V našem případě jsou ale průměry stejné a $x = 0$ je střed mezi oběma kroužky. Platí tedy

$$r = C_1 \cosh \frac{l - C_2}{C_1} = C_1 \cosh \frac{-l - C_2}{C_1}$$

tato rovnost může platit, když

$$l - C_2 = -l - C_2 \quad \text{nebo} \quad l - C_2 = -(-l - C_2).$$

První rovnost pro nenulové l platit nemůže a z druhé vyplývá, že $C_2 = 0$.

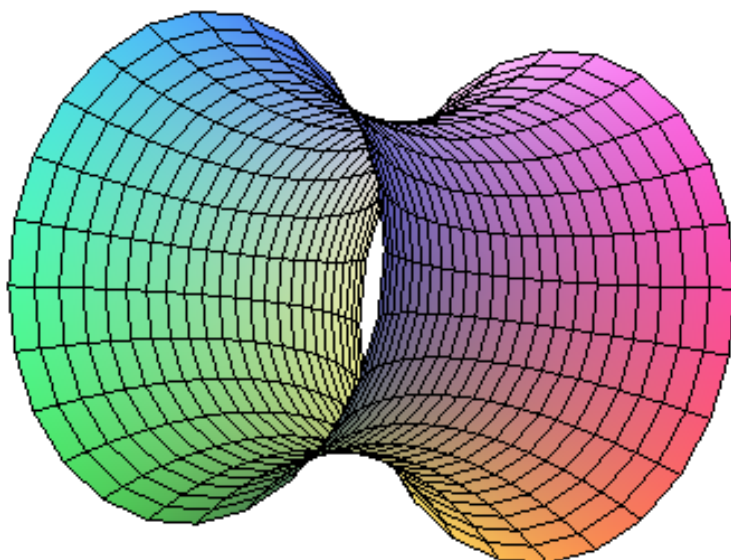
Protože máme již jen jednu konstantu, budeme C_1 dále značit jen C . Tuto konstantu určíme ze vztahu

$$r = C \cosh \frac{l}{C} \quad (2.23)$$

a řešením pro $y(x)$ je

$$y(x) = C \cosh \frac{x}{C}. \quad (2.24)$$

Nalezená rovnice (2.49) je rovnice řetězovky. Tvaru, který zaujme řetěz zavěšený mezi dvěma body, odpovídá křivka popsaná touto funkcí a odtud



Obrázek 2.6: Catenoid

pochází její název. V angličtině se tato křivka nazývá *catenary* a rotační plocha, vytvořená rotací této křivky, se nazývá *catenoid* (viz obrázek 2.6).

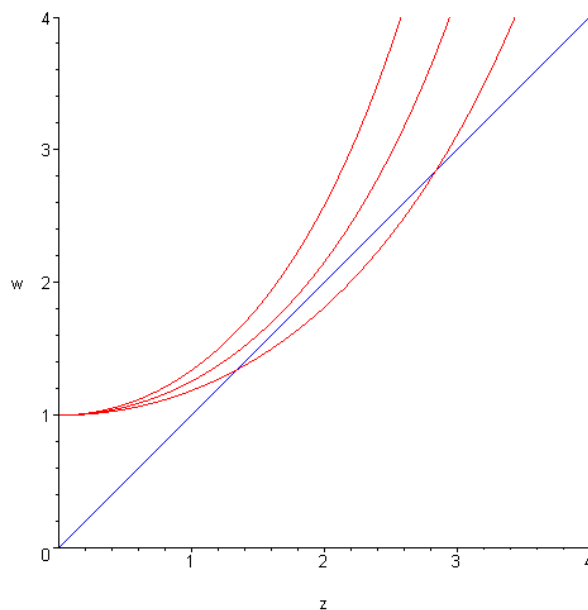
Nyní nalezneme maximální hodnotu l/r , pro kterou minimální povrch existuje. Definujeme-li ve vztahu (2.23)

$$p \equiv \frac{l}{r} \quad \text{a} \quad z \equiv \frac{r}{c}$$

můžeme tuto rovnici přepsat na tvar

$$z = \cosh pz \tag{2.25}$$

Sestrojíme-li grafy funkcí $w = z$ a $w = \cosh pz$ pro nějaká p (viz obrázek 2.7), uvidíme, že rovnice (2.25) pro velká p nemá řešení. To ve skutečnosti znamená, že bude-li hodnota $p = l/r$ příliš velká, blána se bude snažit zaujmout tvar dvou kruhů a tím se přetrhne, jak dokládají i provedené experimenty (viz kapitola 2.3). Hraniční hodnotě p , při které blána zaujme minimální povrch odpovídá případ, kdy přímka určená funkcí $w = z$ bude tečnou křivky

Obrázek 2.7: Graf funkce $w = z$ a $w = \cosh pz$ pro různá p

$w = \cosh pz$ a rovnice (2.25) tedy bude mít jen jedno řešení [8]. V tomto hraničním bodě musí platit, že

$$\begin{aligned} z &= \cosh pz \\ 1 &= p \sinh pz \end{aligned} \tag{2.26}$$

rovnice vydělíme a dostáváme

$$\frac{1}{z} = \frac{p \sinh pz}{\cosh pz}$$

a odtud

$$1 = pz \tanh pz$$

Numericky vyřešíme a dostaneme

$$pz = \frac{l}{c} \doteq 1.19968 \tag{2.27}$$

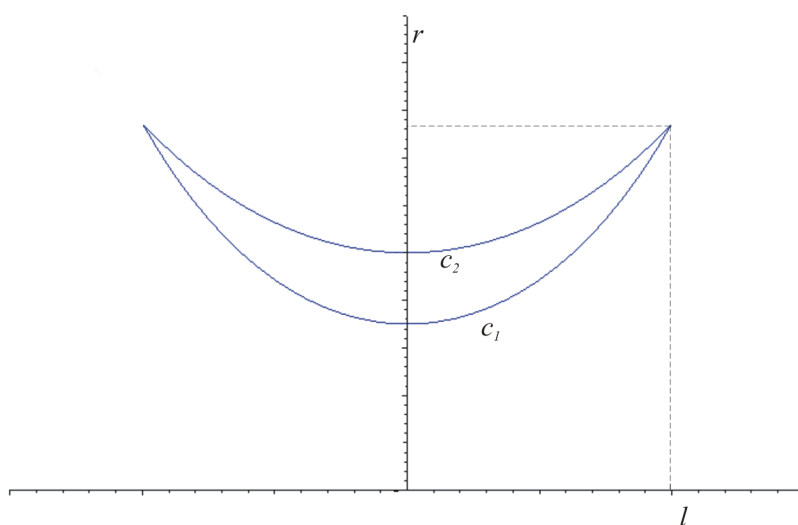
Dosadíme-li do rovnice (2.26), dostaneme

$$p = \frac{l}{r} \doteq 0.66274$$

A konstanta C je v tomto hraničním bodě

$$C = \frac{r}{z} \doteq 0.55243r$$

Bude-li poměr l/r menší než nalezená hraniční hodnota, dostaneme dvě hodnoty konstanty C . Je to poněkud překvapivé a v praxi by to mohlo znamenat, že existují dva různé tvary, které mýdlová blána může zaujmout. Tuto situaci znázorníme na obrázku 2.8, kde pro vyznačené l a r dostáváme pro dvě různá C dvě různé křivky.



Obrázek 2.8: Dvě řešení

Nyní sestrojíme znovu graf funkcí $w = z$ a $w = \cosh pz$, tentokrát pro p menší než je nalezená hraniční hodnota. Zřejmě platí

$$z_1 < z_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{C_1} < \frac{r}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_1 > C_2$$

Z grafu je zřejmé, že derivace $w = \cosh pz$ v bodě odpovídajícímu z_1 je menší než 1. Tedy pro tento bod a odpovídající konstantu C_1 dostáváme rovnici

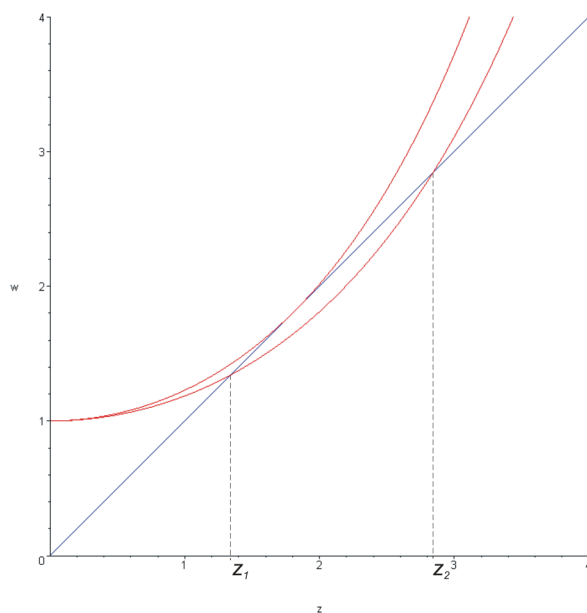
$$z = \cosh pz_1 \tag{2.28}$$

a nerovnici

$$1 > p \sinh pz_1. \tag{2.29}$$

Nerovnici (2.29) vydělíme rovnicí (2.28) a dostaneme

$$1 > pz_1 \tanh pz_1$$

Obrázek 2.9: Graf funkce $w = z$ a $w = \cosh pz$

a odtud plyne, že odpovídající poměr l/C_1 je přibližně

$$pz_1 = \frac{l}{C_1} < 1.19968$$

Pro z_2 je naopak derivace $w = \cosh pz$ větší než 1 a obdobným způsobem dostáváme

$$pz_2 = \frac{l}{C_2} > 1.19968$$

2.2.7 Minimum na jednodimenzionální množině

Zjistili jsme, že funkce $\phi(t)$ má v bodě $t = 0$ stacionární bod. Pokud má být v tomto bodě minimum, musí být v nějakém okolí tohoto bodu $\phi(t) \geq \phi(0)$

$$\phi(t) = \int_{-a}^a f(0)dx + t \int_{-a}^a f'(0)dx + \frac{t^2}{2} \int_{-a}^a f''(0)dx + \frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx \quad (2.30)$$

Pro $t = 0$ dostáváme

$$\phi(0) = \int_{-a}^a f(0)dx + 0 \int_{-a}^a f'(0)dx + \frac{0^2}{2} \int_{-a}^a f''(0)dx + \frac{0^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta 0) dx$$

$$\phi(0) = \int_{-a}^a f(0)$$

Protože jsme spočítali, že $\int_{-a}^a f'(0) = 0$, dosadíme-li do vzorce (2.30)

$$\phi(t) = \int_{-a}^a f(0)dx + 0 + \frac{t^2}{2} \int_{-a}^a f''(0)dx + \frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx,$$

vidíme, že má-li být $\phi(t) \geq \phi(0)$, musíme dokázat, že

$$\frac{t^2}{2} \int_{-a}^a f''(0)dx + \frac{t^3}{6} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx \geq 0.$$

Vytkneme-li $\frac{t^2}{2}$

$$\frac{t^2}{2} \left(\int_{-a}^a f''(0)dx + \frac{t}{3} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx \right) \geq 0,$$

dostáváme

$$\underbrace{\int_{-a}^a f^{(2)}(0)dx}_{L_1} + \underbrace{\frac{t}{3} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx}_{L_2} \geq 0. \quad (2.31)$$

Tušíme, že pro malé t bude $|L_2|$ menší než $|L_1|$. Kdybychom dokazovali, že má funkce v bodě $t = 0$ minimum obvyklým způsobem pomocí její druhé derivace, dostali bychom podmínku, že $f^{(2)}(0) > 0$. K tomu bychom ale potřebovali dokázat, že platí následující vztah

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} (x, y(x), y'(x)) dx. \quad (2.32)$$

Tento důkaz ale není jednoduchý a protože se snažíme používat co nejvíce elementárních matematických prostředků, volíme raději tento postup. Pokud tedy dokážeme, že $L_1 > 0$ a L_2 je omezené, můžeme zvolit vhodný interval pro t tak, že součet $L_1 + L_2$ bude nezáporný.

Nejdříve se podíváme na člen L_1 . Do vztahu (2.12) pro $f^{(2)}(0)$

$$f^{(2)}(0) = \frac{2y' \delta y' \delta y + y(\delta y')^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{yy'^2(\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dosadíme nalezenou funkci y ze vztahu (2.49)

$$y(x) = C \cosh \frac{x}{C}$$

a dosadíme rovněž za y'

$$y' = \sinh \frac{x}{C}$$

a pro první člen levé strany nerovnosti dostaneme

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{2 \sinh \frac{x}{C} \delta y' \delta y + C \cosh \frac{x}{C} (\delta y')^2}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} - \frac{C \cosh \frac{x}{C} \sinh^2 \frac{x}{C} (\delta y')^2}{(1 + \sinh^2 \frac{x}{C})^{\frac{3}{2}}} dx$$

a po úpravě

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{\sinh \frac{x}{C} 2\delta y' \delta y}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} + \left(\frac{C \cosh \frac{x}{C}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} - \frac{C \cosh \frac{x}{C} \sinh^2 \frac{x}{C}}{(1 + \sinh^2 \frac{x}{C})^{\frac{3}{2}}} \right) \delta y'^2 dx \quad (2.33)$$

První člen integrálu upravíme metodou per-partes

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\sinh \frac{x}{C}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} 2\delta y' \delta y dx &= \left[\frac{\sinh \frac{x}{C}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} \delta y^2 \right]_{-a}^a - \\ &- \int_{-a}^a \frac{\cosh \frac{x}{C}}{C \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} - \frac{\sinh^2 \frac{x}{C} \cosh^2 \frac{x}{C}}{C (1 + \sinh^2 \frac{x}{C})^{\frac{3}{2}}} \delta y^2 dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dosadíme zpět do (2.33) a po úpravě dostáváme

$$L_1 = \int_{-a}^a \left(\frac{\cosh \frac{x}{C}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{C}}} - \frac{\sinh^2 \frac{x}{C} \cosh \frac{x}{C}}{(1 + \sinh^2 \frac{x}{C})^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \left(C \delta y'^2 - \frac{\delta y^2}{C} \right) dx$$

a po další úpravě

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{\cosh \frac{x}{C}}{(1 + \sinh^2 \frac{x}{C})^{\frac{3}{2}}} \left(C \delta y'^2 - \frac{\delta y^2}{C} \right) dx. \quad (2.35)$$

Protože platí:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{a} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh^2 x &= \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2} \\ \cosh^2 x &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a tedy

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x.$$

Dosadíme-li do (2.35), dostáváme

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} \left(C \delta y'^2 - \frac{\delta y^2}{C} \right) dx.$$

Nyní zkusíme dokázat, že $L_1 > 0$.

Tuto nerovnost jsme rovněž podrobili testování. Pro různé funkce δy jsme zkoumali, pro jaké hodnoty $\frac{l}{C}$ tato nerovnost platí. Pro funkci (viz příloha B)

$$\delta y = (105 + 20x^2 - x^4)(a^2 - x^2) \quad (2.36)$$

jsme pro $C = 1$ dosáhli stejné hraniční hodnoty poměru $\frac{l}{C}$, jaká nám vyšla z první derivace na straně 25. Tedy pro $\frac{l}{C} < 1.19968$ nám L_1 vyšlo kladné a pro větší $\frac{l}{C}$ záporné. Pro jiné náhodně volené funkce δy a jiné hodnoty C nám hraniční poměr vyšel mnohdy vyšší, ale ve všech případech nám pro $\frac{l}{C} < 1.19968$ vyšlo L_1 kladné. Z toho plyne, že pro $\frac{l}{C} > 1.19968$ nemá funkce lokální minimum. Vrátime-li se nyní k předchozí části, ve které jsme na straně 26 dostali dvě různé konstanty C_1, C_2 , vidíme, že pro C_2 dostaneme právě tento případ a pro C_2 tedy funkce minimum nemá.

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} C \delta y'^2 dx - \int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} \frac{\delta y^2}{C} dx$$

a má-li být $L_1 > 0$, musí platit

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} C \delta y'^2 dx > \int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} \frac{\delta y^2}{C} dx.$$

Je-li $\delta y(a) = 0$ můžeme tuto funkční hodnotu vyjádřit jako

$$\delta y(x) = \int_{-a}^x \delta y'(t) dt, \quad \text{kde } x \in (-a, a).$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} |\delta y(x)| &= \left| \int_{-a}^x \delta y'(t) dt \right| \leq \int_{-a}^x |\delta y'(t)| dt \\ (\delta y(x))^2 &= \left(\int_{-a}^x \delta y'(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_{-a}^x |\delta y'(t)| dt \right)^2 \end{aligned}$$

Napíšeme-li pravý člen nerovnosti jako

$$\left(\int_{-a}^x 1 \cdot |\delta y'(t)| \, dt \right)^2,$$

dostáváme vnitřek integrálu jako součin dvou funkcí a můžeme použít Cauchy-Schwarzovu nerovnost pro funkce.

Věta 4 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Pro reálné funkce $f(x), g(x)$ a reálný parametr t platí: Existují-li integrály*

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx, \int_{-a}^a (g(x))^2 dx, \int_{-a}^a (f(x))^2 dx,$$

pak

$$\left(\int_{-a}^a f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{-a}^a (g(x))^2 dx \int_{-a}^a (f(x))^2 dx. \quad (2.37)$$

Důkaz věty 4 v příloze A.

□

Položíme-li ve vztahu (2.37)

$$f(x) = \delta y'(t) \quad \text{a} \quad g(x) = 1,$$

plyne z této nerovnosti

$$(\delta y(x))^2 \leq \left(\int_{-a}^x 1 \cdot |\delta y'(t)| \, dt \right)^2 \leq \int_{-a}^x (\delta y'(t))^2 dt \int_{-a}^x 1 dt.$$

Protože

$$\int_{-a}^x (\delta y'(t))^2 dt \leq \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt,$$

je

$$\int_{-a}^x (\delta y'(t))^2 dt \int_{-a}^x 1 dt \leq \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt \int_{-a}^a 1 dt$$

a odtud

$$(\delta y(x))^2 \leq \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt \int_{-a}^a 1 dt.$$

Poslední integrál vypočítáme a dostáváme

$$(\delta y(x))^2 \leq 2a \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt.$$

Po integraci obou stran nerovnice je

$$\int_{-a}^a (\delta y(x))^2 dx \leq \int_{-a}^a 2a \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt dx.$$

Protože $2a \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt$ nezávisí na x , můžeme tento člen napsat před integrál

$$\int_{-a}^a (\delta y(x))^2 dx \leq 2a \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt \int_{-a}^a 1 dx,$$

a odtud

$$\int_{-a}^a (\delta y(x))^2 dx \leq 4a^2 \int_{-a}^a (\delta y'(t))^2 dt.$$

Protože hodnota určitého integrálu nezávisí na volbě proměnné, můžeme nahradit t za x a dostaneme ¹

$$\int_{-a}^a (\delta y(x))^2 dx \leq 4a^2 \int_{-a}^a (\delta y'(x))^2 dx. \quad (2.38)$$

My potřebujeme porovnat integrál

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y)^2}{C} dx.$$

Protože

$$\frac{1}{\left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2} \leq \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \leq 1 \quad \text{pro } x \in \langle -a, a \rangle,$$

a odtud

$$\frac{\left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \geq 1,$$

je tedy

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y)^2}{C} dx &\leq \int_{-a}^a \frac{(\delta y)^2}{C} dx \leq 4a^2 \int_{-a}^a \frac{(\delta y')^2}{C} dx \leq \\ &\leq 4a^2 \int_{-a}^a \frac{\left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y')^2}{C} dx = 4a^2 \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y')^2}{C} dx. \end{aligned}$$

Poslední člen ještě upravíme na potřebný tvar

$$\frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} C (\delta y')^2 dx$$

¹Poincarova nerovnost [7] (viz příloha B)

a z nalezené nerovnosti

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y)^2}{C} dx \leq \frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} C (\delta y')^2 dx \quad (2.39)$$

plyne, že $L_1 \geq 0$, pokud

$$\frac{4a^2}{C^2} (\cosh a)^2 \leq 1.$$

Po odmocnění

$$\frac{2a}{C} \cosh a \leq 1.$$

a odtud numericky vypočítáme, že

$$\frac{a}{C} \leq 0.45279. \quad (2.40)$$

Nyní se vrátíme k nerovnosti (2.31), kterou chceme dokázat a budeme se věnovat druhému členu L_2 .

$$\underbrace{\int_{-a}^a f^{(2)}(0) dx}_{L_1} + \frac{t}{3} \underbrace{\int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx}_{L_2} > 0 \quad (2.41)$$

Protože jsme zjistili (viz strana 19), že $f^{(3)}$ můžeme omezit konstantou

$$|f^{(3)}(\vartheta t)| \leq K_2$$

a tedy

$$L_2 = \frac{t}{3} \int_{-a}^a f^{(3)}(\vartheta t) dx \leq \frac{t}{3} \int_{-a}^a K_2 dx = \frac{2t}{3} a K_2.$$

Tato konstanta, jak již bylo uvedeno, závisí na δy a se změnou δy se tedy mění i tato konstanta. Pro L_1 platí, že $L_1 > 0$ a můžeme tedy L_1 nahradit nějakou konstantou $K_1 > 0$. Dosadíme-li za L_1 a L_2 do vztahu (2.41), dostáváme

$$K_1 + \frac{2t}{3} a K_2 \geq 0$$

Když zvolíme t tak, aby

$$\frac{2t}{3} a K_2 \geq -\frac{K_1}{2}$$

je

$$K_1 + \frac{2t}{3} a K_2 \geq -\frac{K_1}{2} + K_1$$

a tedy

$$K_1 + \frac{2t}{3} aK_2 \geq \frac{K_1}{2} \geq 0,$$

což je naším cílem. Když zvolíme t , aby platilo

$$\frac{2t}{3} aK_2 \geq -\frac{K_1}{2}$$

musí být

$$t \geq -\frac{3K_1}{4aK_2}$$

Protože hledáme minimum v okolí bodu $t = 0$, zvolíme t z intervalu

$$\left(-\frac{3K_1}{4aK_2}, \frac{3K_1}{4aK_2} \right)$$

Pro tento interval má funkce $\phi(t)$ na jednodimenzionální množině slabé lokální minimum v bodě $t = 0$.

2.2.8 Minimum

Nyní chceme dokázat, že funkcionál

$$F = \int_{-a}^a 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.42)$$

má pro nalezenou funkci $y(x)$ slabé lokální minimum. Jak plyne z definice 6 (viz strana 14), musíme ukázat, že existuje takové ε , že pro

$$|\delta y(x)| < \varepsilon, |\delta y'(x)| < \varepsilon, \quad \text{kde } x \in \langle -a, a \rangle \quad (2.43)$$

platí nerovnost odvozená v předchozí části, tedy

$$\underbrace{\int_{-a}^a f^{(2)}(0) dx}_{L_1} + \underbrace{\frac{t}{3} \int_{-a}^a f^{(3)}(0) dx}_{L_2} \geq 0,$$

kde

$$L_1 = \int_{-a}^a \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{C}} \left(C \delta y'^2 - \frac{\delta y^2}{C} \right) dx.$$

Na straně 33 jsme odvodili nerovnost (2.39)

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C} \right)^2} \frac{(\delta y)^2}{C} dx \leq \frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C} \right)^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C} \right)^2} C (\delta y')^2 dx$$

Tu nyní upravíme. Nejdříve vynásobíme rovnici (-1).

$$-\int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{(\delta y)^2}{C} dx \geq -\frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2 \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} C (\delta y')^2 dx$$

Po přičtení

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} C (\delta y')^2 dx$$

k oběma stranám rovnice dostaneme

$$L_1 \geq \left(1 - \frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2\right) \int_{-a}^a \frac{1}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} C (\delta y')^2 dx. \quad (2.44)$$

Pro pevné a a C , pro něž platí poměr vypočítaný na straně 33

$$\frac{a}{C} \leq 0.45279, \quad (2.45)$$

je výraz

$$\left(1 - \frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C}\right)^2\right)$$

konstanta větší než nula.

Nyní zkusíme druhý člen L_2 omezit a upravit na vhodný tvar. Funkce $y(x)$ je pevná a $\delta y(x)$ je libovolné splňující podmínky uvedené výše (viz 2.43). Protože $y(x)$ a $y'(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, jsou na tomto intervalu omezené. Tedy můžeme položit

$$y(x) < K \quad \text{a} \quad y'(x) < K.$$

Protože δy je libovolná funkce, můžeme parametr t položit roven 1. Nyní upravíme L_2

$$L_2 = \frac{1}{3} \int_{-a}^a \frac{3(\delta y')^2 (-y' \delta y \delta y' - \delta y + y y' \delta y' + y (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2y' \delta y' + (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}} dx$$

na tvar vhodný k porovnání s L_1 .

$$L_2 = \int_{-a}^a \frac{C (\delta y')^2}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2}{C} \frac{(-y' \delta y \delta y' - \delta y + y y' \delta y' + y (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2y' \delta y' + (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Nyní L_2 omezíme a upravíme.

$$|L_2| = \left| \int_{-a}^a \frac{C (\delta y')^2}{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2} \frac{\left(\cosh \frac{x}{C}\right)^2}{C} \frac{(-y' \delta y \delta y' - \delta y + y y' \delta y' + y (\delta y')^2 - (y')^2 \delta y)}{(1 + (y')^2 + 2y' \delta y' + (\delta y')^2)^{\frac{5}{2}}} dx \right|$$

$$|L_2| \leq \int_{-a}^a \left| \frac{C (\delta y')^2}{(\cosh \frac{x}{C})^2} \right| \left| \frac{(\cosh \frac{a}{C})^2}{C} \right| \left(|y' \delta y \delta y'| + |\delta y| + |y y' \delta y'| + |y (\delta y')^2| + |(y')^2 \delta y| \right) dx$$

$$|L_2| \leq \int_{-a}^a \frac{C (\delta y')^2}{(\cosh \frac{x}{C})^2} \frac{1}{C} (\varepsilon^2 K + \varepsilon + \varepsilon K^2 + \varepsilon^2 K + \varepsilon K^2) dx$$

Je-li $\varepsilon \leq 1$, je

$$|L_2| \leq \frac{\varepsilon}{C} (2K^2 + 2K + 1) \int_{-a}^a \frac{C (\delta y')^2}{(\cosh \frac{x}{C})^2} dx. \quad (2.46)$$

Zvolíme-li tedy ε tak, že

$$\frac{\varepsilon}{C} (2K^2 + 2K + 1) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{C^2} \left(\cosh \frac{a}{C} \right)^2 \right) \quad \text{a} \quad \varepsilon \leq 1$$

plyne ze vztahů (2.44) a (2.46), že součet

$$L_1 + L_2 > 0$$

a funkcionál

$$F = \int_{-a}^a 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.47)$$

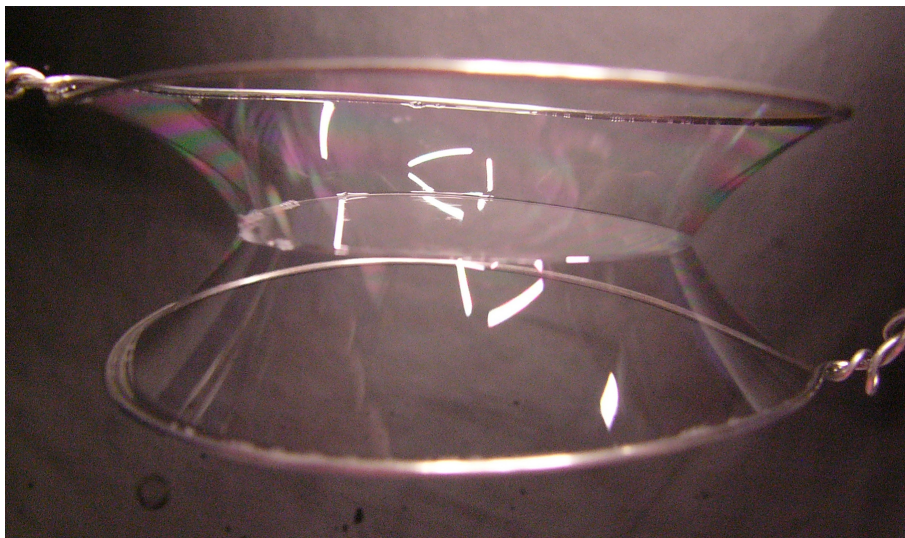
má pro funkci

$$y(x) = C \cosh \frac{x}{C} \quad (2.48)$$

slabé lokální minimum.

2.3 Experiment

Vytvoříme-li pomocí mýdlové vody blánu mezi dvěma rámečky ve tvaru kružnice, s největší pravděpodobností se nám vytvoří systém tří minimálních povrchů, které jsou v rovnováze (obrázek 2.10). Chceme-li vytvořit žádaný



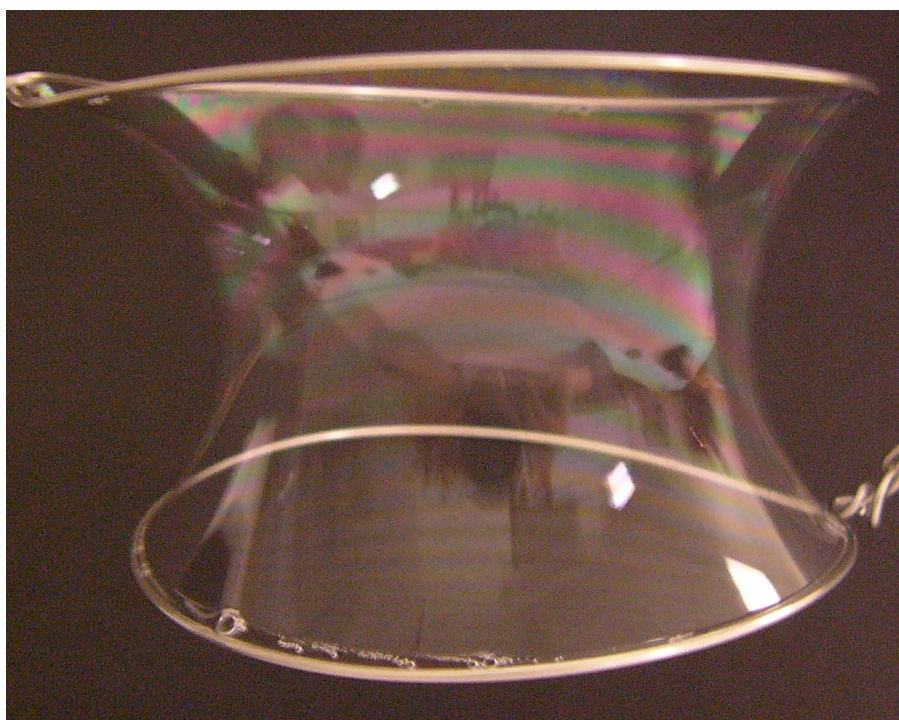
Obrázek 2.10: Tři povrchy mýdlové bubliny

minimální povrch, musíme např. prstem porušit tento systém tří povrchů a poté už mýdlová blána zaujme žádaný tvar.

Testovali jsme, zda reálná situace bude odpovídat našim teoretickým výpočtům. Na obrázku 2.11 je na první fotografii největší poměr l/r , který se nám podařilo zachytit.

Na další fotografii již mýdlová blána po nepatrně malém zvětšení vzdálenosti praskla.

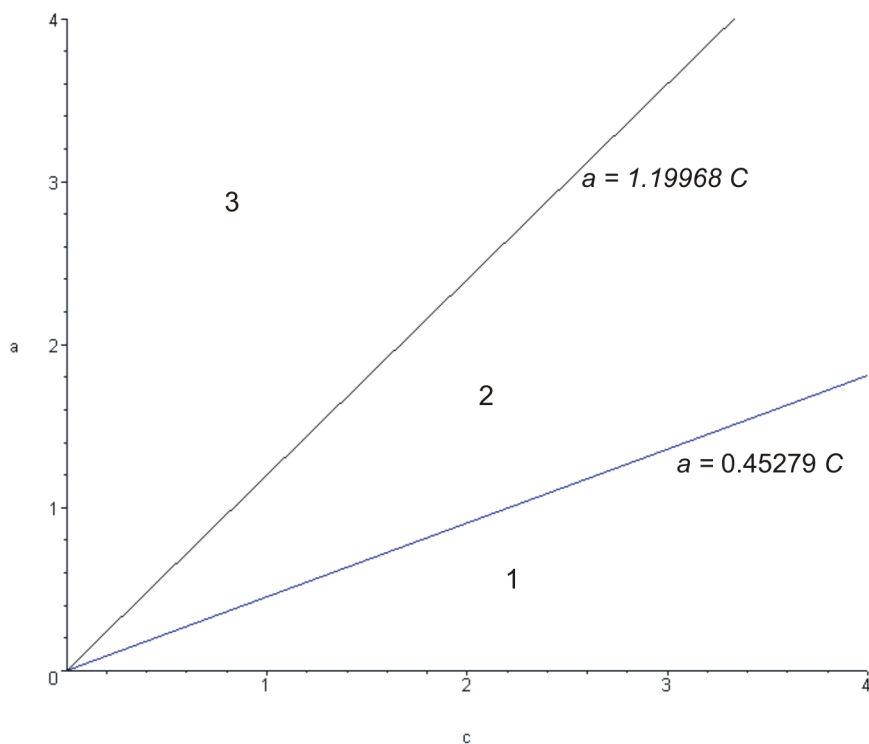
Několikanásobným opakováním těchto pokusů jsme zjistili, že naměřený hraniční poměr vzdálenosti rámečků a průměru těchto rámečků odpovídá hraničnímu poměru vypočítanému z první derivace, tedy přibližně 1.2.



Obrázek 2.11: Minimální povrch mýdlové bubliny

2.4 Shrnutí

Výsledky našich výpočtů můžeme znázornit na následujícím grafu (obrázek 2.12), na kterém je vyznačen poměr vzdálenosti a a konstanty C . Hraniční



Obrázek 2.12: Výsledek

přímka, která odděluje oblast 2 a 3 je hraniční poměr a/c odpovídající hraniční hodnotě l/r , pro který nám vyšla nulová první derivace $\phi(t)$ v bodě $t = 0$, což je nutná podmínka pro existenci hledaného lokálního minima (viz strana 25).

V oblasti 3 minimální rotační plocha neexistuje. To bylo potvrzeno testováním (viz strana 30). Ve skutečnosti mýdlová blána ve vzdálenosti odpovídající této oblasti praskne ve snaze zaujmout povrch tvořený dvěma kruhy spojenými přímkou.

Pro oblast 1 jsme dokázali, že zde existuje minimální rotační plocha a na straně 39 jsme našli rovnici křivky, kterou je plocha tvořena.

$$y(x) = C \cosh \frac{x}{C}. \quad (2.49)$$

Tušíme, že v oblasti 2 existuje tato plocha stejně jako v oblasti 1, ale důkaz je nad možností této diplomové práce. Toto tušení je ale podloženo za první testováním a za druhé praktickým experimentem s mýdlovou bublinou (viz kapitola 2.3).

Kapitola 3

Závěr

Jak objevil již Euler v roce 1744 [4], vytvoří-li se mýdlová blána mezi dvěma rámečky tvaru kružnice, vznikne rotační plocha, která je jedinou rotační plochou s minimálním povrchem. Tato plocha je vytvořena rotací křivky, která se v angličtině nazývá *catenary*, a proto se plocha, vytvořená její rotací, nazývá *catenoid*. Českým ekvivalentem názvu *catenary* je *řetězovka*, což odpovídá latinskému výrazu *catena*, ze kterého je název odvozen a znamená téměř totéž. Tento název vznikl proto, že řetěz zavěšený na obou koncích zaujme tvar odpovídající této křivce. Původně se měla tato diplomová práce zabývat i tímto zajímavým a souvisejícím problémem, ale cíle byly přeceněny a zpracování obou problémů přesahuje rozsah této práce.

Problematikou minimálních povrchů i naším povrchem mýdlové bubliny se zabývá mnoho knih a dokumentů, ale většinou se tento problém neřeší důkladně a řešení je jen naznačeno nebo velmi nepřesně odvozeno. Např. faktem, že pro dané parametry vzdálenosti a poloměru rámečku vyjdou dvě řetězovky, se z nalezených zdrojů zabývá jen [8] a to jen okrajově.

Cílem této práce bylo vyřešit stanovený problém a použít k tomu čisté matematické prostředky a neuvádět tvrzení bez důkazů, na rozdíl od zmíněných publikací. Problém byl v rámci možností této práce vyřešen, ale může být nadále zkoumán ještě do větší hloubky. Teoretické výpočty jsou podloženy praktickými pokusy s mýdlovou blánou. Na CD přiloženém k této práci jsou další fotografie a krátké video znázorňující chování této blány v závislosti na zvětšování vzdálenosti rámečků.

V závislosti na hloubce zkoumání tohoto problému lze některé části využít i pro zvědavé studenty na střední škole.

Příloha A

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro reálné funkce $f(x), g(x)$ a reálný parametr t platí: Existují-li integrály

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx, \int_{-a}^a (g(x))^2 dx, \int_{-a}^a (f(x))^2 dx$$

pak

$$\left(\int_{-a}^a f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{-a}^a (g(x))^2 dx \int_{-a}^a (f(x))^2 dx$$

Důkaz.

$$\int_{-a}^a (f(x) - tg(x))^2 dx = 0$$

po umocnění dostáváme

$$\int_{-a}^a (f(x))^2 dx - 2tf(x)g(x) + (g(x))^2 dx = 0$$

a po úpravě

$$\int_{-a}^a (f(x))^2 dx - \int_{-a}^a 2tf(x)g(x) dx + \int_{-a}^a t^2 (g(x))^2 dx = 0$$

$$t^2 \int_{-a}^a (g(x))^2 dx - t \int_{-a}^a 2f(x)g(x) dx + \int_{-a}^a (f(x))^2 dx$$

diskriminant D

$$D = 4 \left(\int_{-a}^a f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \int_{-a}^a (g(x))^2 dx \int_{-a}^a (f(x))^2 dx$$

Diskriminant $D \leq 0$

$$\left(\int_{-a}^a f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{-a}^a (g(x))^2 dx \int_{-a}^a (f(x))^2 dx$$

□

Příloha B

Konference

Na mezinárodní konferenci **Prezentace matematiky** pořádané Katedrou matematiky Technické univerzity v Liberci, která se bude konat ve dnech 20.-23.9.2005 v budově H univerzity, předvede vedoucí této diplomové práce RNDr. Martina Šimůnková, PhD., jak spočítat v Poincarově nerovnosti menší konstantu, než nám vyšla zde (viz strana 32).

Poincarova nerovnost je nerovnost ve tvaru

$$\int_a^b (\delta y(x))^2 dx \leq c \int_a^b (\delta y'(x))^2 dx \quad (\text{B.1})$$

My jsme tuto nerovnost odvodili elementárními prostředky a tím nám vyšla velká konstanta c . Lze ale dokázat, že tato nerovnost platí i pro menší c a je otázka, pro jaké minimální c tato nerovnost platí. Toto odvození ale přesahuje možnosti této práce.

Na zmíněné konferenci bude konstanta c vypočítána numerickými metodami a v našem případě pro hraniční bod a/c vyjde rovna jedné a je vypočítána jako vlastní číslo určitého integrálního operátoru

$$\int_{-a}^a K(x, t) f(t) dt,$$

kde $K(x, t)$ je jádro tohoto integrálního operátoru. Na této konferenci bude předvedeno, jak toto jádro vypadá a bude spočítáno, že konstanta c je rovna největšímu vlastnímu číslu tohoto operátoru a vyjde 1. Aproximace odpovídající vlastní funkce

$$\delta y = (105 + 20x^2 - x^4)(a^2 - x^2)$$

byla použita v této práci na testování (viz strana 30).

Literatura

- [1] REKTORYS A SPOL.: *Přehled užité matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995. 719 s. ISBN 80-85849-92-5
- [2] REKTORYS A SPOL.: *Přehled užité matematiky II*. Prometheus, Praha, 1995. 906 s. ISBN 80-85849-62-3
- [3] BRDIČKA, M., HLADÍK, A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha, 1987.
- [4] HILDEBRANDT, S., TROMBA, A.: *The parsimonious universe - Shape and form in the natural world*. Copernicus, New York. 330 s. ISBN 0-387-97991-3
- [5] RYBIČKA, J.: *L^AT_EX pro začátečníky*. Konvoj, Brno, 1999.
- [6] PEŠKOVÁ, E.: *Přehled středoškolské fyziky*. Albra, 1995. 313 s.
- [7] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. SNTL, Praha, 1983. 325 s.
- [8] *Minimal surface* [online]. <http://www.physics.harvard.edu/probweek/sol63.pdf>
- [9] *Wikipedia* [online]. <http://en.wikipedia.org>

Seznam obrázků

2.1	Mýdlová blána	10
2.2	Rotační plocha	11
2.3	Rotační plocha	11
2.4	Odvození vzorce	12
2.5	Množina funkcí	15
2.6	Catenoid	24
2.7	Graf funkce $w = z$ a $w = \cosh pz$ pro různá p	25
2.8	Dvě řešení	26
2.9	Graf funkce $w = z$ a $w = \cosh pz$	27
2.10	Tři povrchy mýdlové bubliny	37
2.11	Minimální povrch mýdlové bubliny	38
2.12	Výsledek	39

Rejstřík

funkcionál, 13–16

Leonhard Euler, 9

minimum, 14, 16, 28, 34

minimální povrch, 10, 14, 24, 25

mýdlová blána, 10, 26

nerovnost

Cauchy-Schwarzova, 31

Poincarova, 44